سرعت از دید دستگاه های مختلف، قضیه کوریولیس و سرعت دورانی بین دو دستگاه

در این جلسه، ابتدا به مسئلهٔ تغییر پرداخته و بر مبنای آن‌ها به موضوع سرعت می پردازیم.

تغییر جابجایی به این معناست که جای یک شئ نسبت به شئ دیگر تغییر می‌کند. همین جا مسأله‌ی مهمی به نام زمان مطرح می‌شود.

زمان در حقیقت همان چیزی است که براساس آن می‌گوییم چیزی تغییر کرد. تغییر یک چیز به این معنی است که به چیزی غیر آن که بوده تبدیل شده و این همان مفهوم گذشت زمان را تداعی می‌کند. خداوند موضوع زمان را آفریده، گویی، آن به آن، مخلوقات آفریده می‌شوند. حال سوال این است که، آن به آن، چقدر است؟ پاسخ این سوال را هنوز نمی‌دانیم و ما با مضربی از مقدارِ آن به آن، شبانه‌روز را به عنوان زمان در اختیار داشته و کارهای زندگی‌مان را براساس آن پیش می‌بریم. شبانه‌روز با گردش زمین به دور خودش و یا همان گردشِ خورشید به دور زمین رخ می‌دهد که از آن‌جا ماه‌های خورشیدی یا شمسی تعریف می‌شود (محور دوران این گردش در آزمایشی که به شما محول شد بدست می‌آید) و یا با گردش ماه به دور زمین تعریف می‌شود که از آن جا ماه‌های ماهی یا قمری را داریم. بنابراین ما نمی‌دانیم این زمانی که از آن استفاده می‌کنیم چند برابر فاصله‌ی زمانی بین آن به آن است. مثال محسوسی از این موضوع را در کار کارگردانی می‌بینید که با کنار هم قراردادن عکس‌های متوالی از آن‌های مختلف آن‌ها را به صورت یک فیلم در می‌آورد. خداوند نیز گویی کارگردان هستی است و عکس‌های هستی در آن‌های مختلف را پشت سرِ هم قرار می‌دهد.

به این ترتیب می‌گوییم جابجایی نسبت به آن زمان در حال تغییر کردن است. جزئیات بیشتر در زمینه مفهوم زمان را می‌توانید در جزوه‌ای که با همین عنوان در سایت درس قرار می‌گیرد دنبال کنید.

سرعت ، همان مقدار و اندازهٔ تغییرِ جابجایی نسبت به زمان است. اگر $\underline{r}_{12}$ بردار واصل از جسم ۱ به جسم ۲ باشد و $\underline{r}_{12}(t)$ مقدار آن در زمان t، باشد و $\underline{r}_{12}(t+\Delta t)$ در زمان $t+\Delta t$ ، باشد آن‌گاه سرعت لحظه‌ی t به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\underline{r}_{12}(t+\Delta t)-\underline{r}_{12}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\underline{r}_{12}(t)}{\Delta t}$$

در صورتی که Δt به سمت صفر میل نکند، رابطه‌ی بالا سرعت متوسط بین لحظات t و $t+\Delta t$ را به دست می‌دهد. ولی موضوع سرعت نکته‌ی مهمی دارد که باید به آن توجه کنیم تا به اشتباه نیفتیم. برای درک بهتر

این موضوع مهم، ابتدا مثالی را مطرح می‌کنیم. فرض کنید روی چرخ و فلکی نشسته‌اید و شما روی چرخ نسبت به زمین در حال چرخش هستید. به این ترتیب افراد دیگری که بیرون چرخ هستند اظهار دارند که چرخ و فلک در حال چرخش است. حال بردار جابجایی از خودتان تا مرکز چرخ و فلک را در نظر بگیرید. آیا از دید شما که روی چرخ و فلک نشسته‌اید این بردار جابجایی تغییر می‌کند؟ مسلماً خیر. اما از دید افرادی که بیرون از چرخ و فلک ایستاده‌اند بردار جابجایی واصل بین شما و مرکز چرخ تغییر می‌کند.

بنابراین رابطه‌ی ارائه شده برای سرعت یک جسم دقیق نبوده و باید بپرسیم سرعت از دید چه دستگاهی است. پس همواره توجه داریم که باید سرعت یک جسم نسبت به یک نقطه(جسم دیگر) و از دید یک دستگاه خاص مطرح شود و در غیر این صورت نمی‌توان در مورد سرعت اظهار نظر کرد.

به عنوان مثالی دیگر دستگاه چسبیده به بدن خود را در نظر بگیرید. به هنگام راه رفتن، این دستگاه نسبت به دستگاه ناوبری(جغرافیایی) و یا نسبت به دستگاهی چسبیده به زمین مانند گوشهٔ کلاس در حال تغییر است.

توجه داریم که اگر چه تغییرات یک بردار نسبت به زمان از دید دستگاه‌های مختلف متفاوت است، اما تغییرات طول این بردار از دید همه‌ی دستگاه‌ها یکسان است. در ادامه منظور از $D_s\underline{r}$ مشتق بردار r از دید دستگاه s است و D در حقیقت نماینده‌ی $\frac{\Delta}{\Delta t}$ است وقتی Δt به صفر میل‌می‌کند.

بنابراین لزومی ندارد $D_s\underline{r}$ با $D_u\underline{r}$ برابر باشد. حال می‌خواهیم ارتباط بین این دو را بدست آوریم. اگر بردار را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$^{s}\underline{r} = \begin{bmatrix} r_{1s} \\ r_{2s} \\ r_{3s} \end{bmatrix}$$

آنگاه می‌توان نوشت:

$$\underline{r} = r_{1s}\underline{S_1} + r_{2s}\underline{S_2} + r_{3s}\underline{S_3}$$

با توجه به این‌که بردارهای پایه دستگاه s یعنی $\underline{S_1}$، $\underline{S_2}$ و $\underline{S_3}$ نسبت به زمان از دید دستگاه s تغییری نمی‌کنند، داریم:

$$D_s\underline{r} = (Dr_{1s})\underline{S_1} + (Dr_{2s})\underline{S_2} + (Dr_{3s})\,\underline{S_3}$$

می‌دانیم که در رابطه‌ی بالا منظور از Dr_{is} یا همان $\dot{r}_{is}$ به صورت زیر است:

$$Dr_{is} = \dot{r}_{is} = \frac{dr_{is}}{dt} = \frac{r_{is}(t+\Delta t) - r_{is}(t)}{\Delta t}$$

که همان مشتق متغیرِ عددی نسبت به زمان است و نه متغیری برداری! و لذا به زیرنویس s یا u نیازی نیست!

بطور مشابه رابطه‌ی زیر نیز برقرار است.

$$D_u\underline{r} = \dot{r}_{1u}\underline{U}_1 + \dot{r}_{2u}\underline{U}_2 + \dot{r}_{3u}\underline{U}_3$$

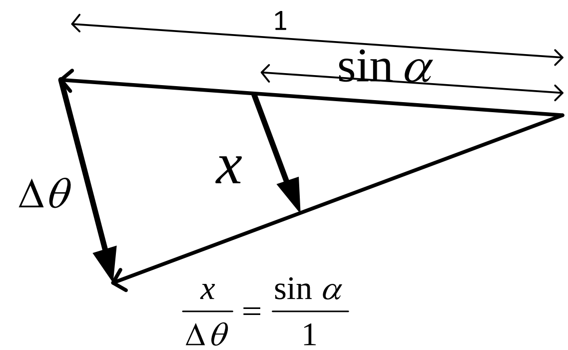
در حقیقت در دستگاه چرخ و فلک $\dot{r}_{is}$ها صفر بودند اما از دید کسانی که بیرون از چرخ ایستاده بودند یعنی در دستگاه چرخ و فلک $\dot{r}_{iu}$ها مخالف صفر بودند.(اگر s دستگاه چسبیده به چرخ و فلک و u دستگاه ناظرانِ بیرون از چرخ باشد).

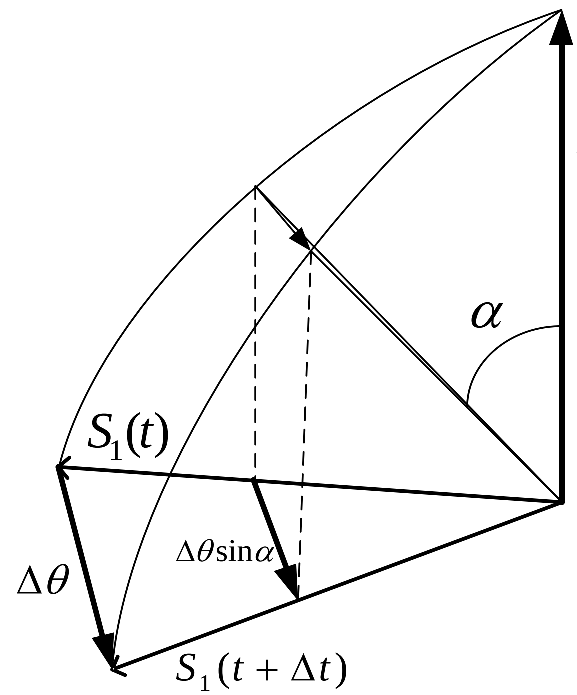
در ادامه سعی بر این داریم تا بگونه‌ای بین سرعت از دیدِ دو دستگاه رابطه‌ای برقرار نماییم. همین کوشش منجر خواهد شد به تعریفِ مفهومی جدید به نامِ «سرعت دورانی بین دو دستگاه». برای اینکه بدانیم رابطه‌ی بین تغییرات بردار r از دید دو دستگاه s و u به چه صورت است از رابطه‌ی زیر که از همان عبارت مربوط به مشتقِ حاصلضرب می‌آید، بهره می‌بریم.

$$D_u\underline{r} = (Dr_{1s})\underline{S}_1 + r_{1s}D_u\underline{S}_1 + (Dr_{2s})\underline{S}_2 + r_{2s}D_u\underline{S}_2 + (Dr_{3s})\underline{S}_3 + r_{3s}D_u\underline{S}_3$$

در حقیقت رابطه‌ی بالا با توجه به این نکته نوشته شده است که برای اینکه بدانیم r از دید u چگونه تغییر کرده است، باید بدانیم r از دید s چه تغییری کرده است(عبارت‌های$(Dr_{is})\underline{S}_i$) و سپس باید دید، s از دید u چه تغییری کرده است(عبارت‌های $r_{is}D_u\underline{S}_i$).

حال ببینیم مثلاً $\underline{S}_1$ از زمان t تا $t+\Delta t$ از دید u، به صورت شکل نشان داده شده تغییر کرده است:





(لازم به ذکر است که تعامدهایی که در شکل بالا فرض می‌شود با کوچک گرفتن Δt برقرار است و تنها برای درک بهتر شکل با بزرگنمایی ترسیم شده است.)

حال می‌خواهیم بردار $\underline{S_1}(t)$ را با دورانی به بردار $\underline{S_1}(t+\Delta t)$ ببریم. ساده‌ترین نوع دوران حول برداری عمود بر صفحه‌ی گذرنده از این دو بردار است که آن را $\underline{K}$ می‌نامیم. می‌دانیم که اگر این فاصله باندازهٔ کافی کوچک در نظر گرفته شود، ΔS_1 ($\Delta S_1 = S_1(t+\Delta t) - S_1(t)$) هم عمود بر $\underline{K}$ است و هم عمود بر $\underline{S_1}(t)$ توجه کنید که اندازهٔ S همواره یک باقی می‌ماند و فقط درحال دوران است!. مطابق شکل مشخص است که $\|\Delta S_1\| = \Delta\theta$.

حال در ادامه کلیهٔ دوران‌های ممکن دیگر را نیز در نظر می‌گیریم(دلیل را جلوتر متوجه خواهید شد!). حالتی را در نظر می‌گیریم که محور دوران $\underline{K}$ بر S_1 عمود نباشد و با آن زاویه α بسازد. مجدداً ΔS_1 دوباره، هم عمود بر $\Delta\theta\underline{K}$ است و هم عمود بر $\underline{S_1}(t)$. ولی مشخص است که این بار $\|\Delta S_1\| = \Delta\theta\cdot\sin(\alpha)$. در واقع به این ترتیب و در حالت کاملاً کلی ΔS_1 از روی $\underline{S_1}(t)$ و $\Delta\theta\underline{K}$ ساخته می‌شود که هم بر $\underline{S_1}(t)$ و هم بر $\Delta\theta\underline{K}$ عمود بوده و اندازه‌اش برابر است با : سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها ضرب‌در اندازهٔ هر یک. این بردار به صورت زیر است. توجه کنید که گویی مفهوم ضرب خارجی دو بردار برای همین منظور ساخته شده است.

$$\underline{\Delta S_1} = (\Delta\theta\underline{K}) \times \underline{S_1}$$

به این ترتیب توجه کنید که با توجه به αهای متنوعی که می‌توان گرفت، پس بی‌شمار بردار دورانِ $(\Delta\theta\underline{K})$ برای $\underline{\Delta S_1}$ در نظر گرفت.

حال هر سه بردار پایه‌ی دستگاه s را در نظر بگیرید. درست است که برای هر یک از ΔS_i ها بی‌شمارِ $(\Delta\theta\underline{K})$ می‌توان یافت ولی تنها و تنها یکی از آنهاست که برای هر سه می‌تواند کار کند و این یعنی فقط یک دوران داریم که هر سه $S(t)$ ها را به $S(t+\Delta t)$ها ببرد و این دوران را حول برداری به نام $\underline{K}$ ی مشترک و به اندازه‌ی $\Delta\theta$ِ مشترک، در نظر می‌گیریم. به این ترتیب داریم:

$$\frac{\Delta S_{1,2,3}}{\Delta t}_{\Delta t\to 0} = (\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\underline{K}) \times \underline{S_{1,2,3}}$$

و از آن جاست که حالا می‌توان نوشت :

$$D_u\underline{r} = D_s\underline{r} + (\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\underline{K}) \times \left(r_{1s}\underline{S}_1 + r_{2s}\underline{S}_2 + r_{3s}\underline{S}_3\right)$$

بنابراین رابطه‌ی زیر که به قضیه‌ی کوریولیس معروف است به دست می‌آید.

$$D_u\underline{r} = D_s\underline{r} + (\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\underline{K}) \times r$$

جمع‌بندی:

دقت کنید که در راهِ ارتباط دادن بین سرعت از دید دو دستگاه، مفهوم جدیدی را پیش کشیده‌ایم که از روی همان $\Delta\theta\underline{K}$یِ مشترک به صورت زیر تعریف گردید:

$$\left.\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\underline{K}\right|_{\Delta t\to 0}$$

چون بوسیلهٔ این بردار می‌توان چگونگیِ تغییر نمودنِ هر سه بردارِ پایهٔ یک دستگاه را از دیدِ دستگاه دیگر هم‌زمان به دست آورد، آن را سرعت دورانی دستگاه اول نسبت به دستگاه دوم نام گذاشته و به صورت زیر نمایش داده و بخوانید: سرعت دورانی دستگاه s نسبت به u .

$$\underline{\omega}_{us}$$

لذا رابطه کوریولیس را به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D_u\underline{r} = D_s\underline{r} + \underline{\omega}_{us} \times r$$

از همین عبارت به دست آمده می‌توان کمک گرفته و بآسانی نشان داد که :

$$\omega_{us} = -\omega_{su}$$

این را به عهدهٔ خواننده گذارده‌ایم.